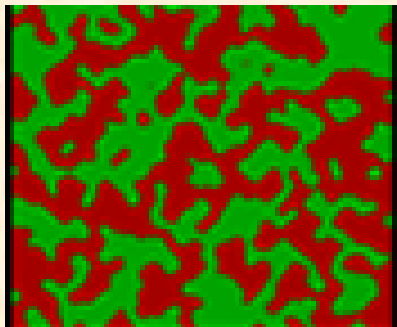




# Nagypontosságú aritmetika II.

# Nagypontosságú aritmetika: közelítések



Gyök(2) közelítése:  
(egész aritmetika)

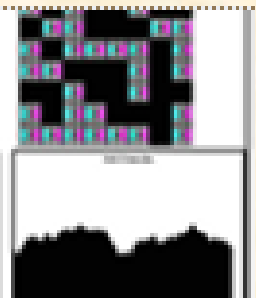
$$x_{n+1} := \frac{1}{2} * \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right) \rightarrow \sqrt{2}$$

Pell egyenlet: A  $P^2 - N * Q^2 = 4$  egyenletnek végtelen sok megoldása van, ha  $N$  nem négyzetszám.

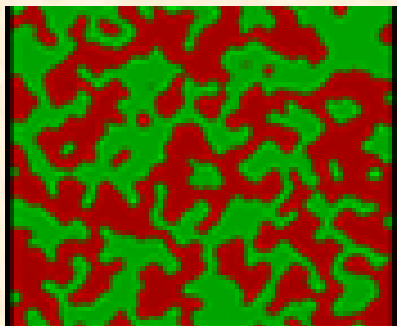
$N=2$  esetén legyen  $x_n = \frac{P_n}{Q_n}$ ,

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} * \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right) = \frac{P_n^2 - 2}{P_n * Q_n} = \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

Ha  $(P_n, Q_n)$  megoldása a Pell egyenletnek, akkor  $(P_{n+1}, Q_{n+1})$  is az, tehát:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \sqrt{2}$



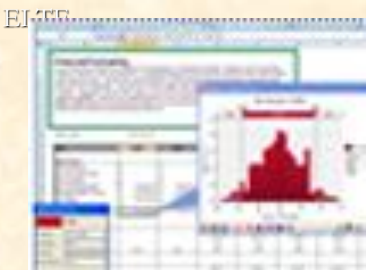
# Nagypontosságú aritmetika: közelítések



$$P_{n+1}^2 - N * Q_{n+1}^2 - 4 = (P_n^2 - 2)^2 - N * P_n^2 * Q_n^2 - 4 =$$

$$P_n^4 - 4 * P_n^2 + 4 - N * P_n^2 * Q_n^2 - 4 =$$

$$P_n^2 * (P_n^2 - 4 - N * Q_n^2) = P_n^2 * 0$$



Gyök(2) közelítése M lépésben:

Gyök2 (M, P, Q) :

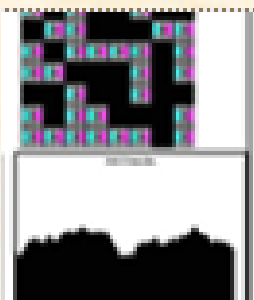
(P, Q) := (6, 4)

Ciklus i=1-től M-ig

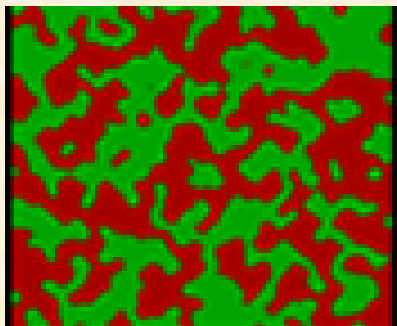
Q := P\*Q; P := P\*P-2

Ciklus vége

Eljárás vége.



# Nagypontosságú aritmetika: közelítések



Az  $e$  közelítése (egész aritmetika):

$$e = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} * \left( 1 + \frac{1}{3} * (\dots) \right)$$



eközelítés  $(M, P, Q)$  :

$(P, Q) := (1, M)$

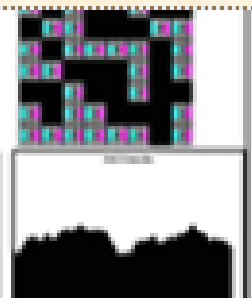
Ciklus  $i=M$ -től 2-ig  $-1$ -esével

$P := P + Q; Q := Q * (i - 1)$

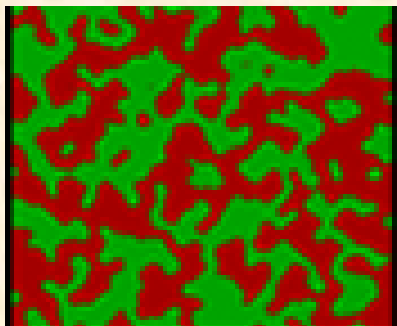
Ciklus vége

$P := P + Q$

Eljárás vége.



# Nagypontosságú aritmetika: közelítések



A  $\pi$  közelítése (egész aritmetika):

Nevezetes törtek:  $256/81 \approx 3.16$ ,

$$22/7 > \pi > 223/71$$

Wallis formula: 
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2*2*4*4*6*6*...}{1*3*3*5*5*7*...}$$

piközelítés (M, P, Q) :

$$(P, Q) := (1, 1)$$

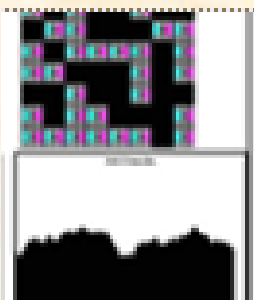
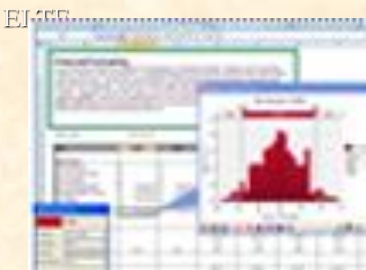
Ciklus  $i=2$ -től  $M$ -ig 2-esével

$$P := P * i * i; \quad Q := Q * (i-1) * (i-1)$$

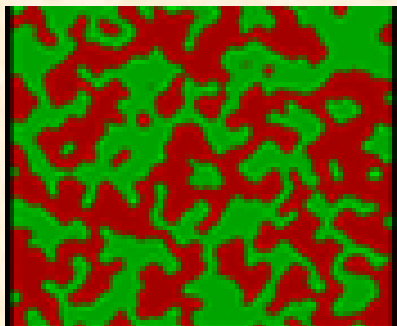
Ciklus vége

$$Q := Q * (M+1)$$

Eljárás vége.



# Nagypontosságú aritmetika: közelítések



A  $\pi$  közelítése (racionális aritmetika):

$$\pi = 24 * \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + 8 * \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 4 * \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$\operatorname{arctg}(x, M)$  :

$R := x; y := x; e := -1$

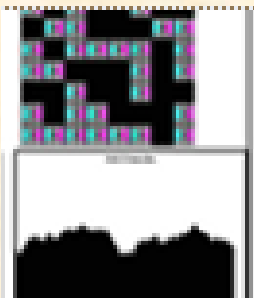
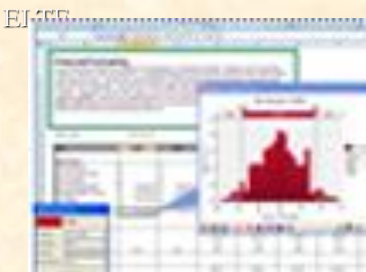
Ciklus  $i=3$ -től  $M$ -ig 2-esével

$y := y * x * x; R := R + e * y / i; e := -e$

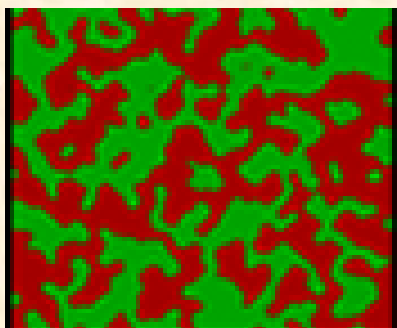
Ciklus vége

$\operatorname{arctg} := R$

Eljárás vége.



# Nagypontosságú aritmetika: számrendszerek



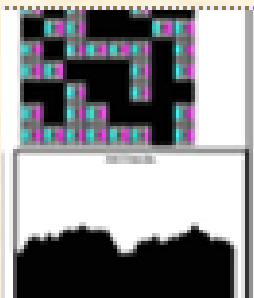
Általános feladat:

$$(\pm u_n \dots u_1 u_0, u_{-1} \dots u_{-m})_A \rightarrow (\pm v_p \dots v_1 v_0, v_{-1}, \dots, v_{-q})_B$$

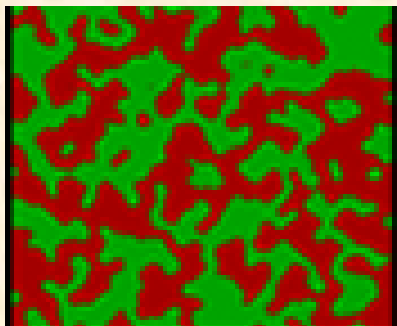
ahol 
$$\sum_{i=-m}^n u_i * A^i = \sum_{j=-q}^p v_j * B^j$$

Kérdések:

- pozitív számból pozitív, negatív számból negatív lesz?
- egészrészből egészrész, törtrészből törtrész lesz?
- $A=B^K$ ,  $B=A^K$ ?



# Nagypontosságú aritmetika: számrendszerek



Egész számok: B-vel osztás A alapúban

$$U_{A \rightarrow (v_m \dots v_0)_B}$$

Átalakítás (U, V) :

$i := 0$

Ciklus amíg  $U > 0$

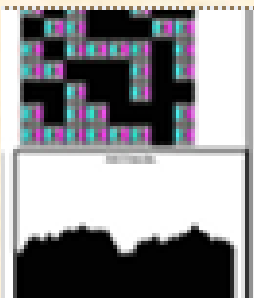
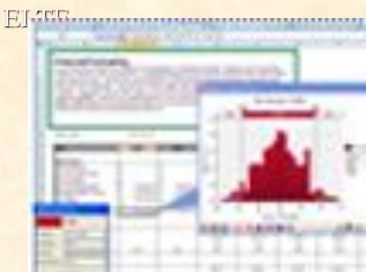
$V.t(i) := U \bmod B; U := U \operatorname{div} B$

$i := i + 1$

Ciklus vége

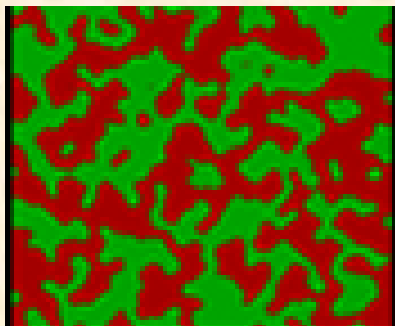
$V.N := i - 1$

Eljárás vége.





# Nagypontosságú aritmetika: számrendszerek



Egész számok:  $A$ -val szorzás  $B$  alapúban

$$(u_n \dots u_0)_A \rightarrow V_B$$

Mindent felírunk  $B$  alapú számrendszerben.

Átalakítás  $(U, V)$  :

$$V := U.t(n)$$

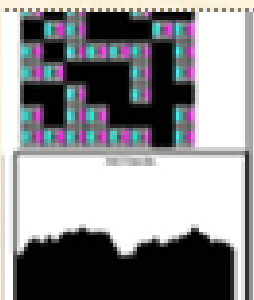
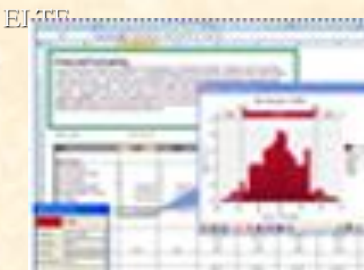
Ciklus  $i=n-1$ -től  $0$ -ig  $-1$ -esével

$$V := V * A + U.t(i)$$

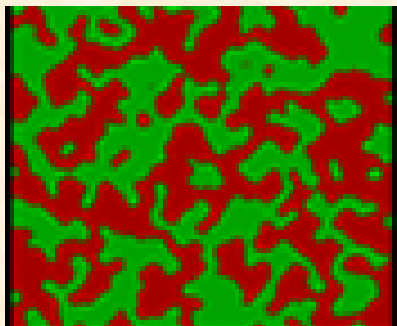
Ciklus vége

Eljárás vége.

$$\sum_{i=0}^n u_i * A^i = (((u_n * A + u_{n-1}) * A + u_{n-2}) * A + \dots)$$



# Nagypontosságú aritmetika: számrendszerek



Törtek: B-vel szorzás A alapúban

$$U_A \rightarrow (0, v_{-1}, \dots, v_{-m})_B$$

Átalakítás  $(U, V)$  :

$i := -1$

Ciklus amíg  $U \neq 0$  és  $i > -\text{Max}m$

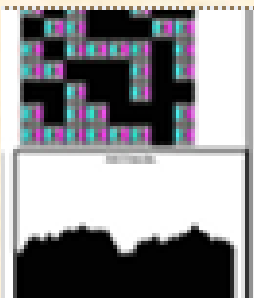
$V.t(i) := \text{egészrész}(U * B)$

$U := \text{törtrész}(U * B)$

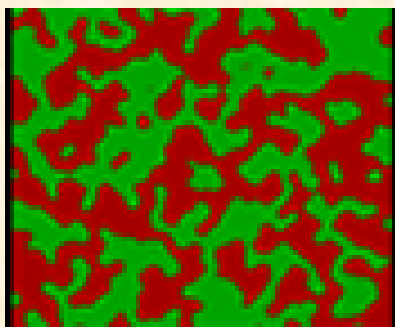
$i := i - 1$

Ciklus vége

Eljárás vége.



# Nagypontosságú aritmetika: számrendszerek



Törtek:  $A$ -val osztás  $B$  alapúban

$$(0, u_{-1}, \dots, u_{-m})_A \rightarrow V_B$$

Mindent felírunk  $B$  alapú számrendszerben.

Átalakítás  $(U, V)$  :

$$V := U.t(-m)$$

Ciklus  $i = -n+1$ -től  $-1$ -ig

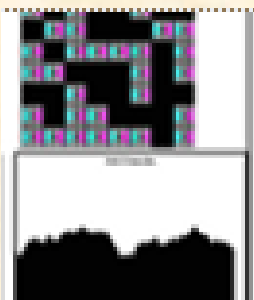
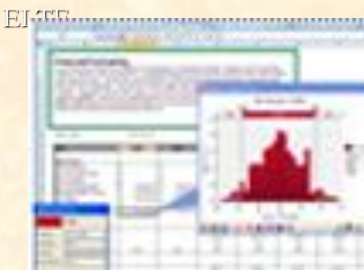
$$V := V/A + U.t(i)$$

Ciklus vége

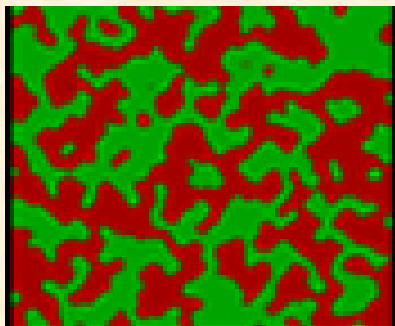
$$V := V/A$$

Eljárás vége.

$$\sum_{i=-m}^{-1} u_i * A^i = (((u_{-m} / A + u_{-m+1}) / A + u_{-m+2}) / A + \dots)$$



# Nagypontosságú aritmetika: számrendszerek

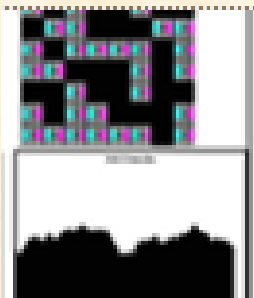
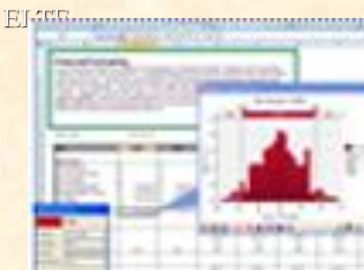


Vegyes alapú számrendszerek

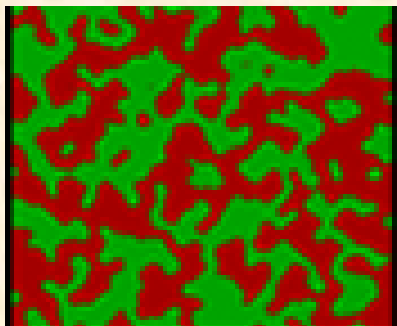
- faktoriális
- idő
- ...

Megoldási ötlet:

- átvitel helyes számolása



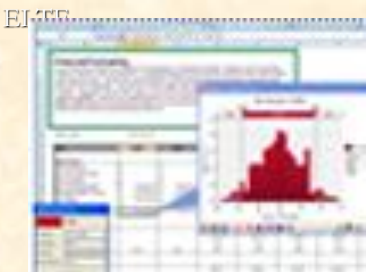
# Nagypontosságú aritmetika: számrendszerek



Negatív alapú számrendszer

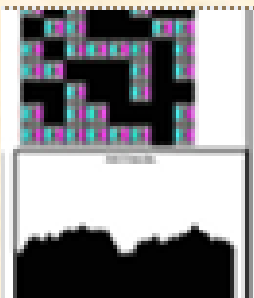
- -10-es számrendszer:

$$x = \sum_{i=0}^N x_i * (-10)^i$$



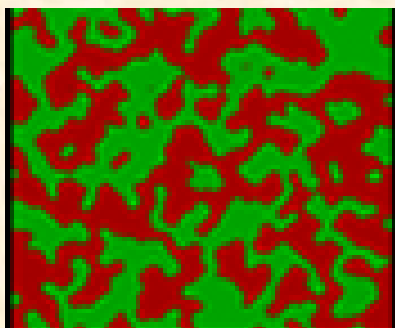
Reciprok alapú számrendszerek

- 1/10 alapú számrendszer



$$x = \sum_{i=0}^N x_i * \left(\frac{1}{10}\right)^i$$

# Nagypontosságú aritmetika: számrendszerek



Általános feladat:

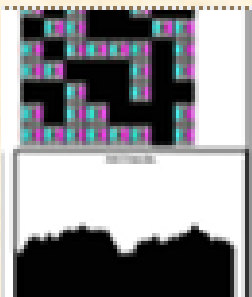
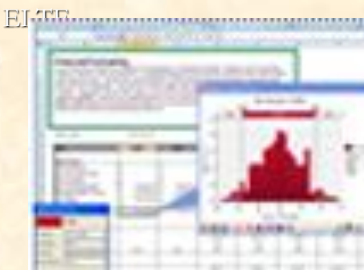
$$(\pm u_n \dots u_1 u_0, u_{-1} \dots u_{-m})_A \rightarrow (\pm v_p \dots v_1 v_0, v_{-1}, \dots, v_{-q})_B$$

➤ Speciális eset:  $A = B^K$

$$(\pm \dots u_0, u_{-1} \dots)_A \rightarrow (\pm \dots v_{k-1} \dots v_1 v_0, v_{-1} \dots v_{-k} \dots)_B$$

➤ Speciális eset:  $B = A^K$

$$(\pm \dots u_{k-1} \dots u_1 u_0, u_{-1} \dots u_{-k} \dots)_A \rightarrow (\pm \dots v_0, v_{-1} \dots)_B$$



A high-angle, wide shot of a modern building's courtyard. The building's facade is a vibrant red, composed of a grid of square panels. Many of these panels are replaced by windows of various sizes, some with white frames and others with dark frames. The courtyard floor is a light, neutral color, and the building's structure is visible from above, showing the repeating pattern of the red facade. In the center of the image, there is a semi-transparent yellow rectangular box containing the word "Vége" in a black, serif font.

Vége