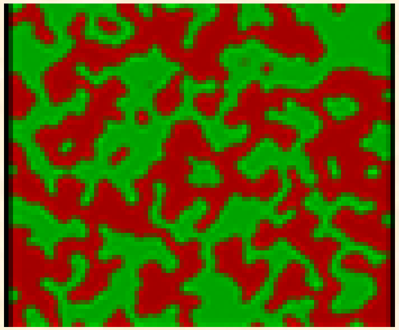
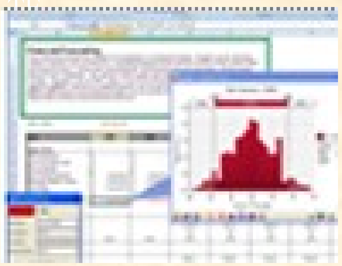
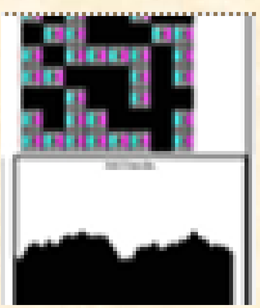
Véletlen események

Véletlen események

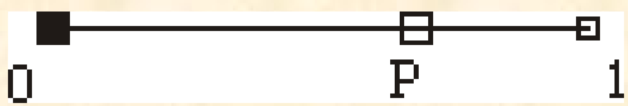






2 esemény, kizáróak, rajtuk kívül más nem lehet.

- A esemény P valószínűségű
- B esemény 1-P valószínűségű

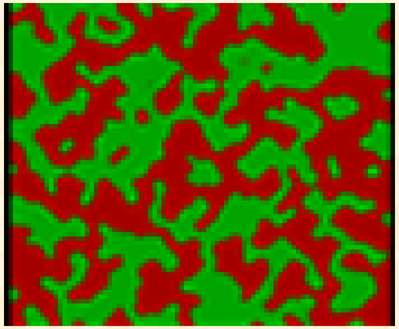


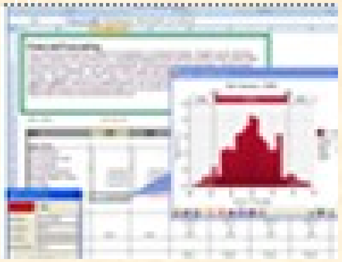
…

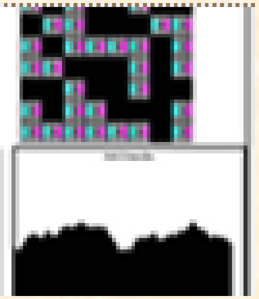
```
Ha véletlenszám<P akkor A esemény
                különben B esemény
```

…

Véletlen események

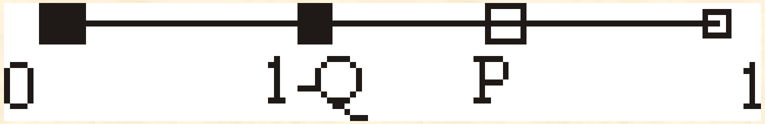






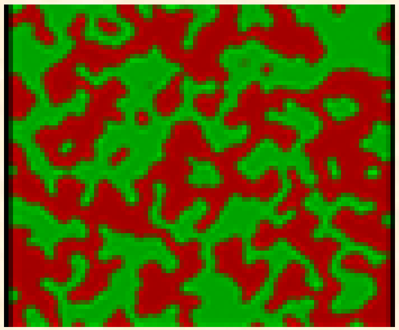
2 esemény, nem kizáróak, rajtuk kívül más nem lehet.

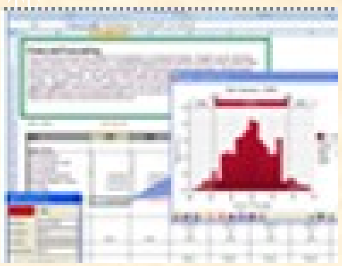
- A esemény P valószínűségű
- B esemény Q (P+Q>1) valószínűségű

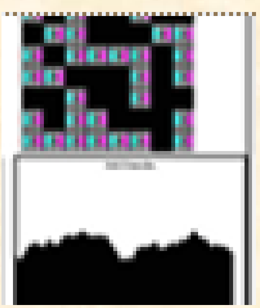



```
…
x:=véletlenszám
Ha x<P akkor A esemény
Ha x≥1-Q akkor B esemény
…
```

Véletlen események

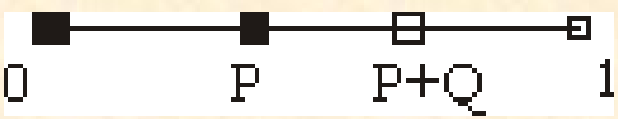






2 esemény, kizáróak, rajtuk kívül más is lehet.

- A esemény P valószínűségű
- B esemény Q (P+Q<1) valószínűségű

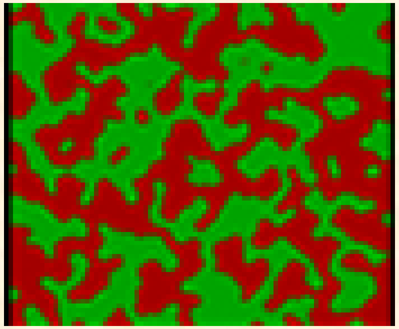


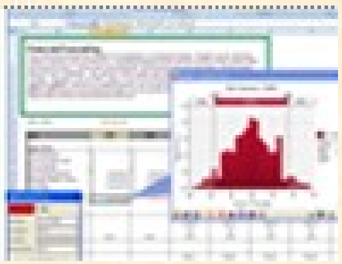
…

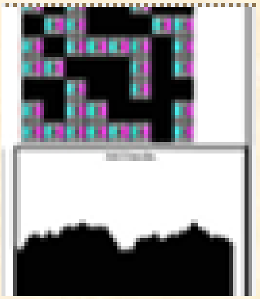
```
x:=véletlenszám
Ha x<P akkor A esemény
különben ha x<P+Q akkor B esemény
```

…

Véletlen események



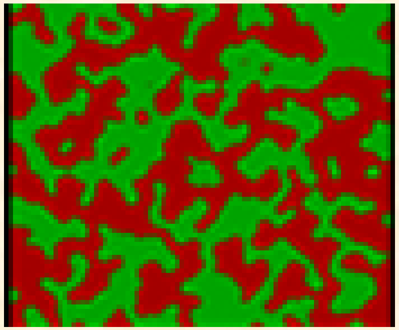


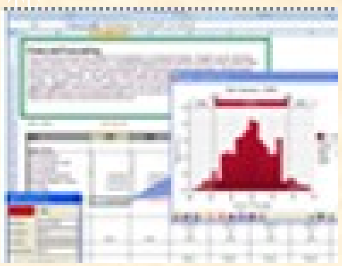


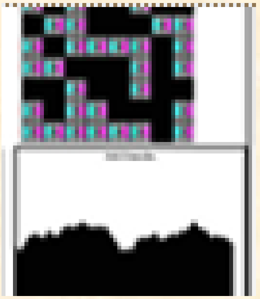
Tapasztalatok:

- Az egyes események valószínűségével megegyező hosszú intervallumokat veszünk.
- Ha a két esemény együtt is előfordulhat, akkor az intervallumok átfedik egymást.
- Ha rajtuk kívül más nem lehet, akkor lefedik a teljes [0,1) intervallumot.

Véletlen események







N esemény, kizáróak, rajtuk kívül más nem lehet, egyenlő valószínűségűek: minden esemény 1/N valószínűségű

0≤véletlenszám<1 →

0≤N*véletlenszám<N →

1≤N*véletlenszám+1<N+1 →

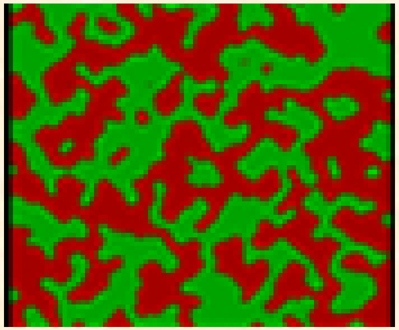
1≤egészrész(N*véletlenszám+1)≤N

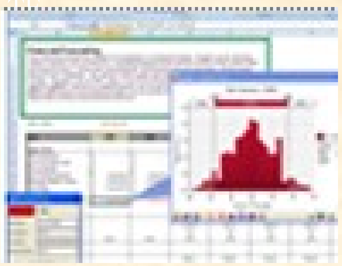
…

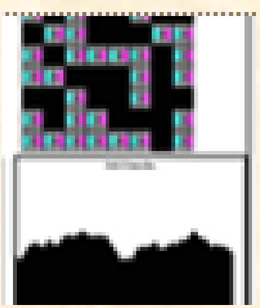
```
V:=egészrész(N*véletlenszám+1)
```

…

Véletlen események







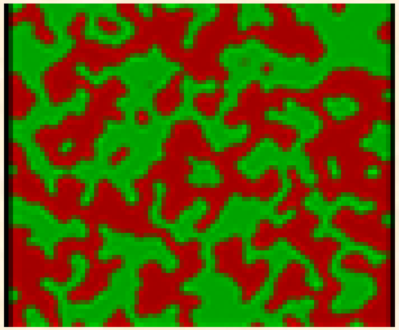
N esemény, kizáróak, rajtuk kívül más nem lehet, különböző (P_i) valószínűségűek.

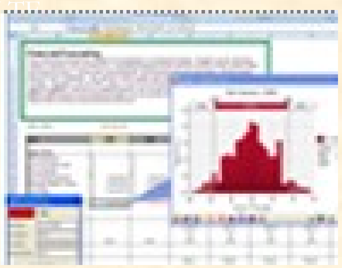
```
…
i:=1; h:=P(i); x:=véletlenszám
Ciklus amíg x≥h
  i:=i+1; h:=h+P(i)
Ciklus vége
v:=i
…
```

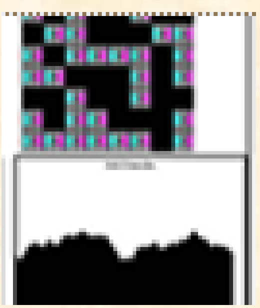
Kérdés: biztos befejeződik a ciklus?

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$$

Véletlen események





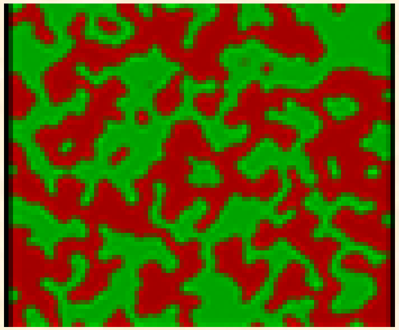


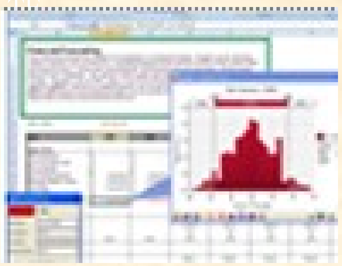
Végtelen sok esemény, kizáróak, rajtuk kívül más nem lehet, különböző (P_i) valószínűségűek.

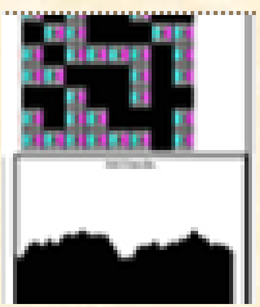
Adott ε>0 számhoz legyen m a legnagyobb index, amire $P_m > ε$!

```
…
i:=1; h:=P(i); x:=véletlenszám
Ciklus amíg x≥h és i≤m
  i:=i+1; h:=h+P(i)
Ciklus vége
v:=i
…
```

Véletlen események







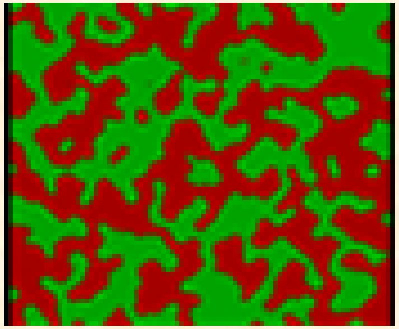
Binomiális eloszlás (hányszor következik be egy p valószínűségű esemény n kísérletből):

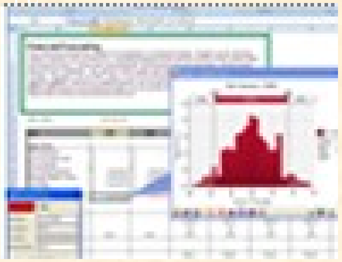
$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

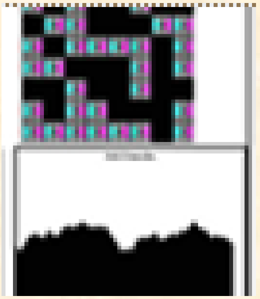
Ekkor tehát adott N+1 kizáró esemény (0-szor következik be, 1-szer következik be, …) különböző valószínűségekkel. Az események teljes eseményrendszert alkotnak.

Így használható a második, véges sok eseményre vonatkozó módszer.

Véletlen események





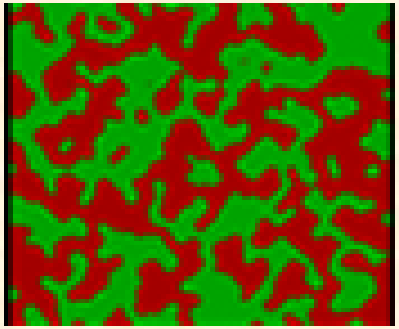


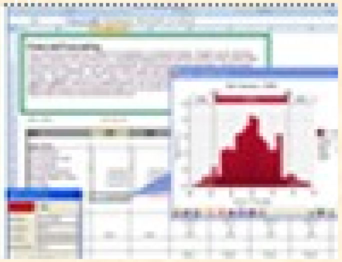
Binomiális eloszlás (hányszor következik be egy p valószínűségű esemény n kísérletből):

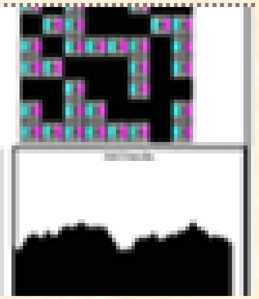
$$\chi_p(x)=\begin{cases}1, & ha \quad x<p\\ 0, & ha \quad x\geq p\end{cases} \qquad v:=\sum_{j=1}^{n}\chi_p(R)$$

```
…
v:=0
Ciklus j=1-től n-ig
  Ha véletlenszám<p akkor v:=v+1
Ciklus vége
…
```

Véletlen események





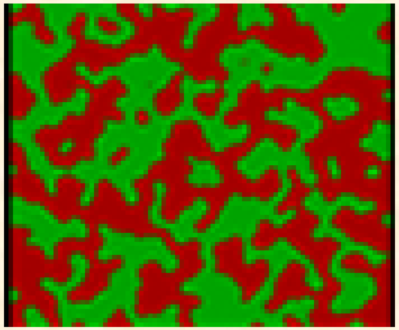


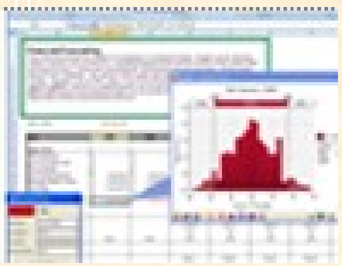
Geometriai eloszlás (egy p valószínűségű esemény első bekövetkezésének sorszáma):

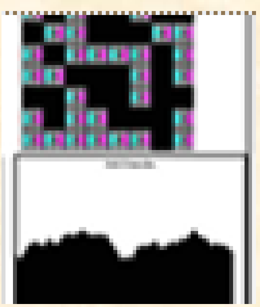
$$p(i) = (1-p)^{i-1} p$$

Ekkor van végtelen sok kizáró eseményünk (i≥1), amire alkalmazható az utolsó alapmódszer.

Véletlen események





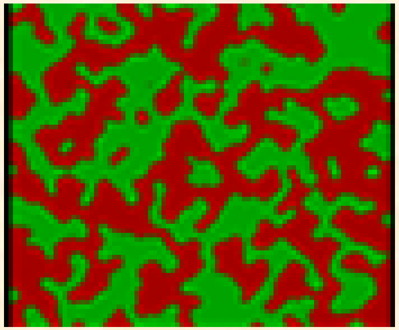


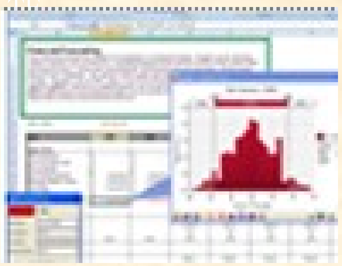
Geometriai eloszlás (egy p valószínűségű esemény első bekövetkezésének sorszáma):

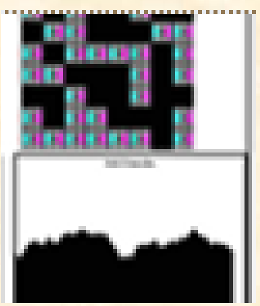
```
…
v:=1
Ciklus amíg véletlenszám≥p
  v:=v+1
Ciklus vége
…
```

Kérdés: lehet a ciklus végtelen (ha a p=0-t kizárjuk)?

Véletlen események







Geometriai eloszlás (egy p valószínűségű esemény első bekövetkezésének sorszáma):

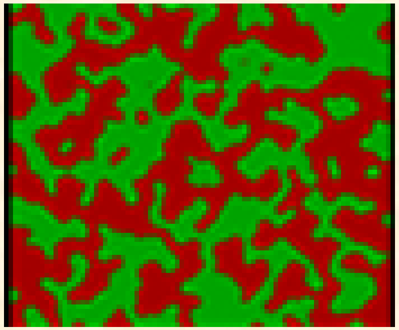
Belátható, hogy egy véletlenszámra

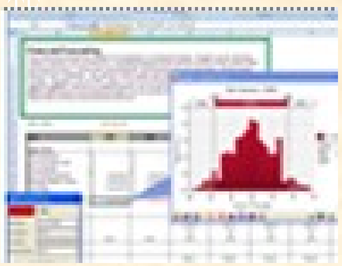
$$n-1<\frac{\ln(\textit{véletlenszám})}{\ln(1-p)}\le n$$

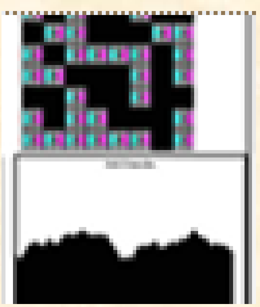
éppen p(n) valószínűséggel igaz, azaz

$$v:=\left\lceil\frac{\ln(\textit{véletlenszám})}{\ln(1-p)}\right\rceil$$

Véletlen események







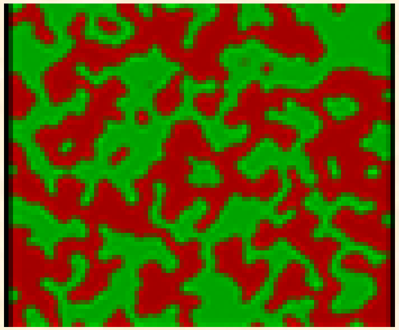
Poisson eloszlás (esemény bekövetkezésének gyakorisága):

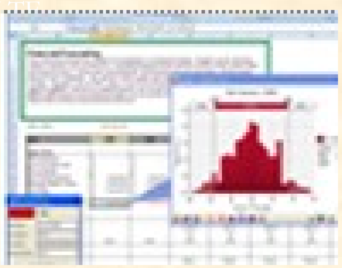
$$p(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

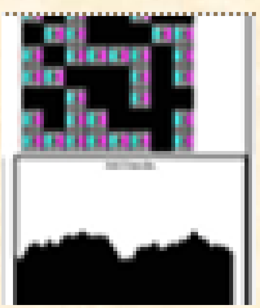
Olyan v-t kell találni, amelyre:

$$e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{v-1} \frac{\lambda^j}{j!} \le véletlenszám < e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{v} \frac{\lambda^j}{j!}$$

Véletlen események





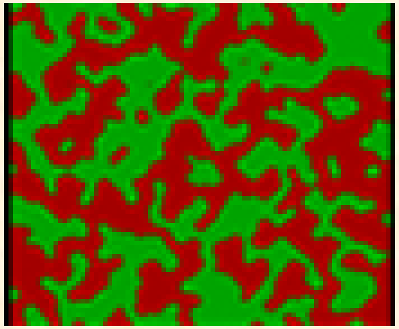


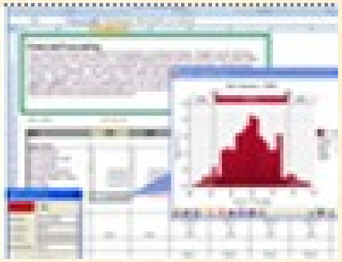
Poisson eloszlás (esemény bekövetkezésének gyakorisága):

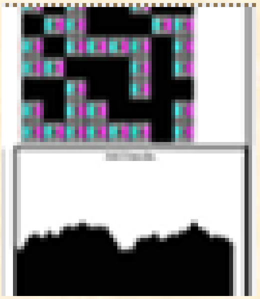
```
…
T(0):=1; S(0):=T(0); v:=1
x:=véletlenszám*exp(λ)
Ciklus amíg x≥S(v-1)
   T(v):=T(v-1)*λ/v
   S(v):=S(v-1)+T(v)
   v:=v+1
Ciklus vége
…
```

$$e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{v-1}\frac{\lambda^j}{j!}$$

Véletlen események







Normális eloszlás :

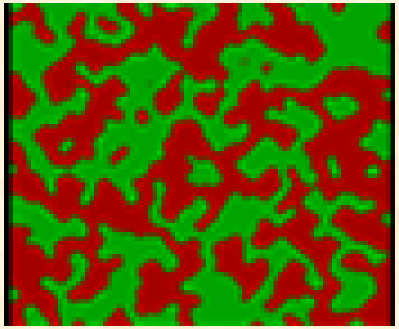
Állítás: Független valószínűségi változók összege normális (Gauss-) eloszlást követ, ha a tagok száma minden határon túl növekszik.

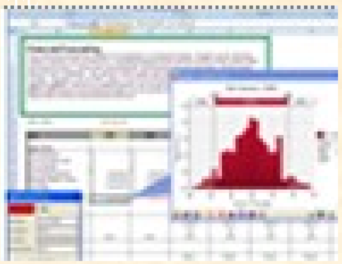
Adott várható értékű (m) és a szórású (s) valószínűségi változókra az alábbi összeg a standard normális eloszlást közelíti:

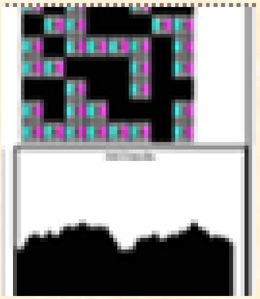
$$\frac{1}{s*\sqrt{n}}*\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)$$

Most $m=\frac{1}{2}$ és $s=\frac{1}{\sqrt{12}}$.

Véletlen események







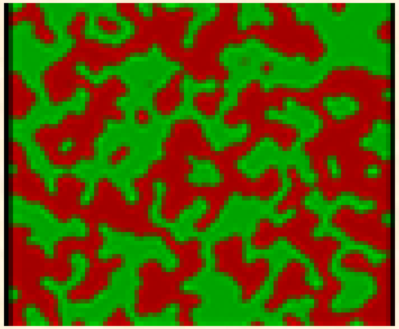
Normális eloszlás :

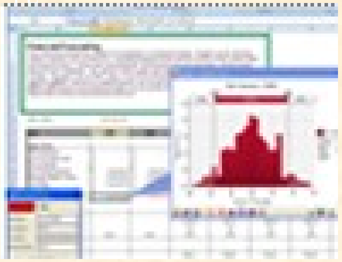
```
…
S:=0
Ciklus i=1-től n-ig
  S:=S+Véletlenszám
Ciklus vége
V:=gyök(12)/gyök(n)*(S-n/2)
…
```

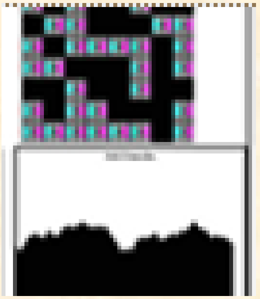
Megjegyzés: Ha $n=12*m^2$ alakú, akkor az utolsó képlet:

```
V:=(S-n/2)/m
```

Véletlen események





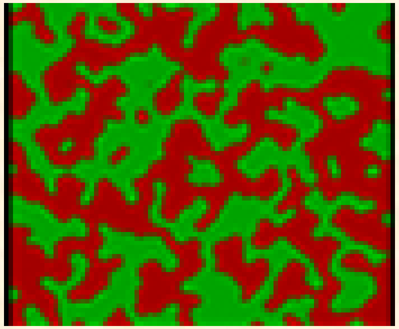


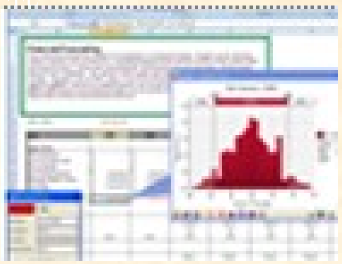
Véletlen permutáció

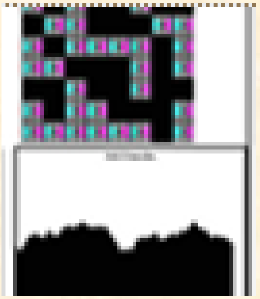
- keverés véletlen kiválasztással

```
Véletlen permutáció:
  Ciklus i=1-től N-1-ig
    j:=véletlen(i..N)
    Csere(X(i),X(j))
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Véletlen események



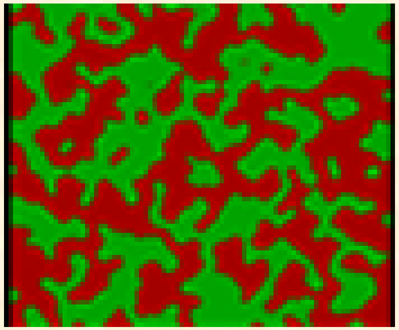


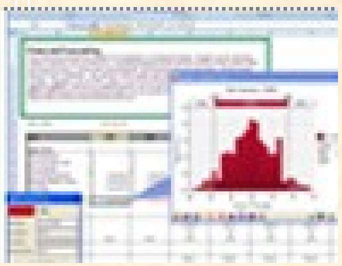


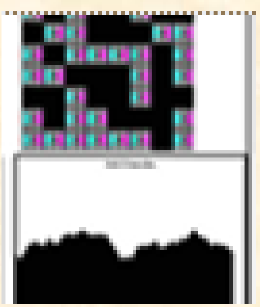
N*K elemű halmaz K egyenlő részre osztása véletlenszerűen:

```
Véletlen részekre osztás(N,K,H):
  Ciklus i=1-től K*N-1-ig
    j:=véletlen(i..N)
    Csere(X(i),X(j))
    m:=(i-1) div K; H(m):=H(m)∪X(i)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Véletlen események





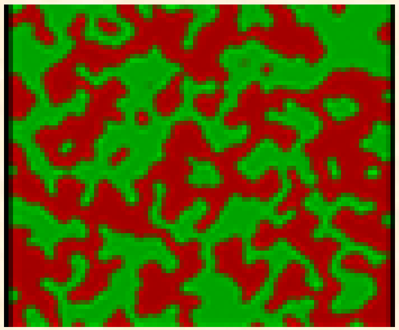


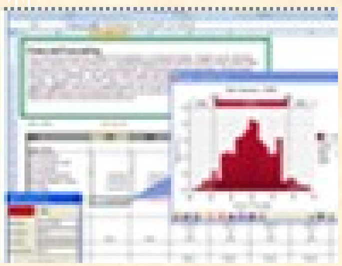
Véletlen kombináció

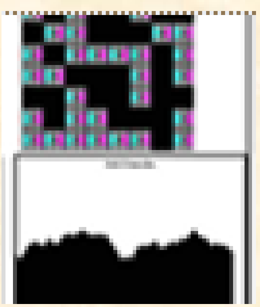
- kiválogatás N elemből ((K–DB)/(N–i+1) valószínűséggel az i. elemet)

```
Véletlen kombináció(N,K,DB,Y):
  DB:=0
  Ciklus i=1-től N-ig
    Ha véletlenszám<(K-DB)/(N-i+1)
       akkor DB:=DB+1; Y(DB):=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Véletlen események





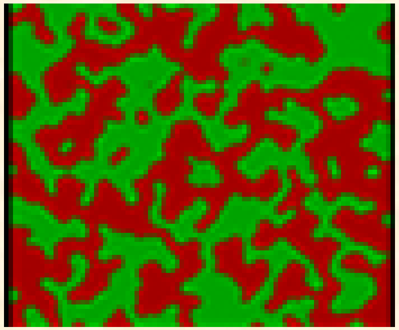


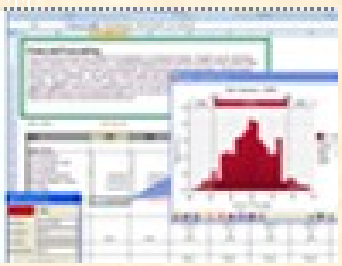
Véletlen kombináció

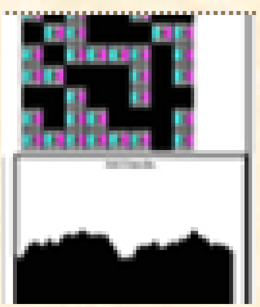
- kiválogatás tetszőleges számú elemből (K/i valószínűséggel az i. elemet i>K esetén)

```
Véletlen kombináció(K,DB,Y):
  Y():=(1,...,K)
  Ciklus i=K+1-től N-ig
    Ha véletlenszám<K/i
       akkor j:=véletlen(K); Y(j):=i
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Véletlen események







Tartalom

- választás 2 elemi esemény közül
- választás sok elemi esemény közül
- nevezetes eloszlású véletlenszámok
- véletlen kombinatorikai algoritmusok